量子力学I　レポート(第3回)

341052G　(計数)
さいたまおとこ

2005年1月26日提出

1. 角運動量

(a) 与えられた Y は球面調和関数 $Y_{lm}(\theta,\psi)$ となる。
固有関数 $\boldsymbol{l}^2, l_z$ の固有値がそれぞれ $l(l+1)\hbar^2, m\hbar$ であることより、

$$(l_x^2+l_y^2)Y_{lm} = (\boldsymbol{l}^2 - l_z^2)Y_{lm} = [l(l+1)-m^2]\hbar^2 Y_{lm}$$

(b) まず球面調和関数について $m \geq 0, \quad P_l^m =$ Legendre 陪関数 として

$$Y_{lm}(\theta,\psi) = (-1)^m P_l^m(\cos\theta)e^{im\psi}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}$$

かつ Rodrigue の公式より

$$\sqrt{1-\xi^2}\frac{dP_l^m}{d\xi} = P_l^m + 1 - \frac{m\xi}{1-\xi^2}P_l^m$$

これらを使って l_+ を作用させると、

$$\begin{aligned} l_+Y_{lm} =& (l_x+il_y)Y_{lm} = \hbar e^{i\psi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{tan\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}\right] \\ &= \hbar e^{i\psi}(-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}\left[\frac{dP_l^m}{d\xi}(\cos\theta)(-\sin\theta) - \frac{m}{\tan\theta}P_l^m(\cos\theta)\right]e^{im\psi} \\ &= \cdots = \hbar\sqrt{(l+m+1)(l-m)}Y_{l,m+1} \end{aligned}$$

2. トンネル効果

(a) $k^2 = \frac{2m\epsilon}{\hbar^2}, \kappa^2 = \frac{2m(V_0-\epsilon)}{\hbar^2}$ として Schrödinger 方程式を立てると

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}\psi = -k\psi(x<0, a<x) \\ &\frac{d^2}{dx^2}\psi = -\kappa\psi(0 \leq x \leq a) \end{aligned}$$

となり、一般解は

$$\psi = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < 0) \\ Ce^{ikx} & (a < x, \text{透過波のみ}) \\ De^{i\kappa x} + Ee^{-i\kappa x} & (0 \le x \le a) \end{cases}$$

となる。一階微分を含めた連続条件より、

$$A + B = D + E, \quad De^{\kappa a} + Ee^{-\kappa a} = Ce^{ika}$$

$$ik(A - B) = \kappa(D - E), \quad \kappa(De^{\kappa a} - Ee^{-\kappa a}) = ikCe^{ika}$$

これらより、透過率は

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \cdots = \frac{4\epsilon(V_0 - \epsilon)}{4\epsilon(V_0 - \epsilon) + V_0^2 \sinh \kappa a}$$

(b) 流れ $j(x)$ は、$a < x$ において

$$j(x) = \frac{ih}{2m}\left[\frac{d\psi^*}{dx}\psi - \psi^*\frac{d\psi}{dx}\right] = \frac{\hbar k}{m}|C|^2$$

ここで、A についての規格化を行っておけば (a) の透過率 T を用いて

$$j(x) = \frac{\hbar k T}{m}$$

3. 電荷を持つ振動子

(a) 一様な電場の元での三次元調和振動子の Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - eEz\right]\psi = \epsilon\psi$$

ポテンシャルの項を z について平方完成してしまえばよいので、$z' = z - \frac{eE}{m\omega^2}$ とおけば

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r'^2\right]\psi' = \left(\epsilon + \frac{e^2E^2}{2m\omega^2}\right)\psi'$$

この式は、調和振動子の周りに電場のないときのほうがエネルギーが $\frac{e^2E^2}{2m\omega^2}$ だけ高いことを意味する。

(b) エネルギー変化が求まったので

$$\Delta\epsilon = -\frac{e^2E^2}{2m\omega^2} = -\frac{1}{2}\alpha E^2 \qquad \to \alpha = \frac{e^2}{m\omega^2}$$

4. 合流型超幾何関数

僕の頭も合流しそうです。