数値解析　レポート (第2回)

2年　341052G　(計数・システム情報)
さいたまおとこ

2005年1月12日提出

1　Double Exponential Formula

(1) $I = \int_{-1}^{1} f(y)dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y+1}{2}}dy$ について、変数変換

$$y = \phi(t) = \tanh(\frac{\pi}{2}\sinh t)$$

により値を求める。台形則への適用は一般に

$$T_h = h\sum_{k=-N_1}^{N_2} f(\phi(kh))\phi'(kh)$$

だが、情報落ちを避けるため、区間の端点の特異性をおさえる DE 公式の性質を利用して

$$t = -a, \qquad a, \qquad -\frac{a}{2}, \qquad \frac{a}{2}, \qquad 0$$

のように $f(\phi(t))\phi'(t)$ の絶対値の小さい方から順に和を取る。

$a = 3.3, \qquad \phi'(t) = \frac{\pi}{2}\frac{\cosh t}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)}$ より Scilab で計算すると

$$T_h (= T_{h_0}) = 0.9217491, \qquad \text{真値との誤差}\delta_0 = I - T_{h_0} = 0.2550825$$

(2) 刻み幅を順次変えて計算すると

k	$T_{\frac{h_0}{2^{k-1}}}$	δ_{k-1}
1	0.9217491	0.2550825
2	0.6711299	0.0044632
3	0.6666669	2.195D-07
4	0.6666667	1.110D-16

以降の k では変化がなかった。これより、刻み幅を小さくするにつれて最初 T は二次収束のスピードで真値に近づくが、計算機の精度上丸め誤差が働きこれ $(k = 4)$ 以上精度はよくならない。

2　中心差分近似

(1) Taylor 展開の差をとって

$$M_h - f'(1) \approx \frac{1}{16}h^2 + \frac{7}{256}h^4$$

(2) $h_0 = 0.2$ として

k	$M_{\frac{h_0}{2^{k-1}}}$
1	0.5025448
2	0.5006278
3	0.5001564
4	0.5000391

これにより、

$$\frac{M_{h_0} - M_{\frac{h_0}{2}}}{M_{\frac{h_0}{2}} - M_{\frac{h_0}{2^2}}} = 4.0673449, \qquad \frac{M_{\frac{h_0}{2}} - M_{\frac{h_0}{2^2}}}{M_{\frac{h_0}{2^2}} - M_{\frac{h_0}{2^3}}} = 4.0165115$$

h が十分小さければ、(1) において

$$M_{\frac{h}{2}} - M_{\frac{h}{2^2}} \approx \frac{1}{2^2}\left(M_h - M_{\frac{h}{2}}\right)$$

この事から $2^2 = 4$ に近づくとわかる。

(3) (1) で h^2 を落としたいので

$$M^{(1)}_{\frac{h_0}{2^k}} = \frac{4M_{\frac{h_0}{2^{k-1}}} - M_{\frac{h_0}{2^k}}}{3}$$

(4)

k	$M^{(1)}_{\frac{h_0}{2^k}}$
1	0.4999887
2	0.4999993
3	0.5000000
4	0.5

よって

$$\frac{M^{(1)}_{\frac{h_0}{2}} - M^{(1)}_{\frac{h_0}{2^2}}}{M^{(1)}_{\frac{h_0}{2^2}} - M^{(1)}_{\frac{h_0}{2^3}}} = 16.382059$$

(2) と同様の計算により、16 に近づく。

(5) 誤差の見積もりは順に

$$M^{(1)}_{\frac{h_0}{2^2}} - f'(1) \approx \frac{1}{15}(M^{(1)}_{\frac{h_0}{2}} - M^{(1)}_{\frac{h_0}{2^2}}) = -7.054D - 07(\text{真誤差} - 6.887D - 07)$$

$$M^{(1)}_{\frac{h_0}{2^3}} - f'(1) \approx \frac{1}{15}(M^{(1)}_{\frac{h_0}{2^2}} - M^{(1)}_{\frac{h_0}{2^3}}) = -4.306D - 08(\text{真誤差} - 4.280D - 08)$$

となり、$f'(1) = \frac{1}{2}$ を使った値とほぼ一致した誤差予想ができている。

3 Runge-Kutta 法

(1)(2)(3) 計算結果は以下

k	$R_{\frac{h_0}{2^{k-1}}}$	比 $_k$
1	0.2962361	19.696929
2	0.2955754	17.897862
3	0.2955419	16.949695
4	0.2955400	16.473931

$\frac{R_{\frac{h_0}{2^{k-1}}}-R_{\frac{h_0}{2^k}}}{R_{\frac{h_0}{2^k}}-R_{\frac{h_0}{2^{k+1}}}}$ が近づいているのが 16 ということは見て取れるが、なぜなのかはよくわかっていない。. . .

※感想

前回のレポートは、内容はともかくとして、手書きの数式にはさみとのりでグラフを切り貼りし、みっともなくてなんとも提出時肩身が狭かった。冬休み中 TEX を頑張って体裁だけは整えてみた。Scilab の入門プリントがかなり役立ったので、ああいうものの TeX 版をぜひ作ってください。